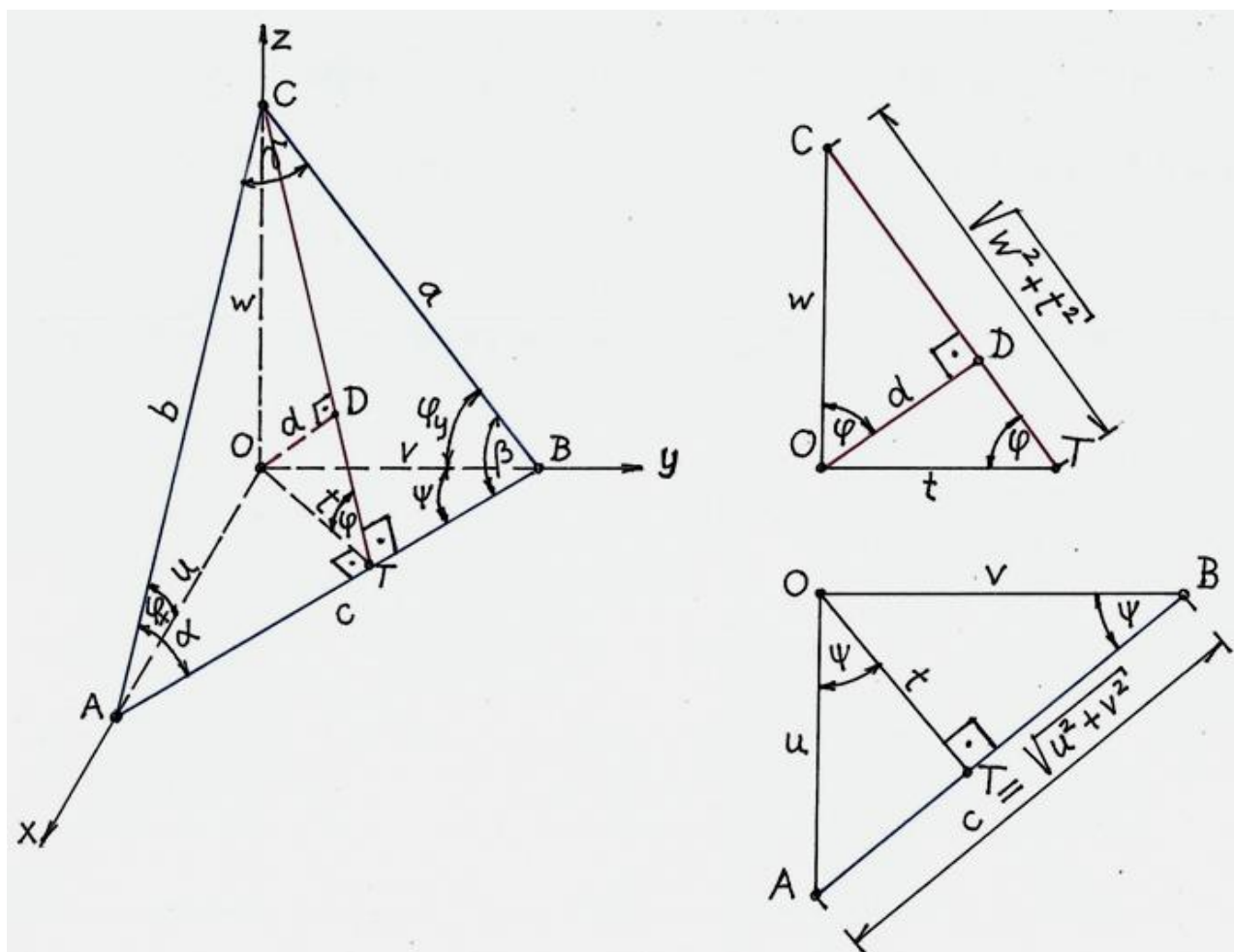


Néhány feladat a derékszögű testszögletben

Az idők során ezekkel már többször találkoztunk, mert mintegy adták magukat. Ez azt jelenti, hogy egyszer csak ott álltak előttünk a papíron. Ezek közül most néhányat újra előveszünk, hiszen – a régi, *Ludas Matyi* című vicclap mottóját idézve – :
„Egy újszülöttnék minden vicc új.”

Az említett *derékszögű testszöglet* másik neve: derékszög(let)ű *tetraéder* – 1. ábra.



1. ábra

E tetraéder O csúcsából induló 3 éle egymásra páronként merőleges, hosszuk és jelük u, v, w . A másik 3 él egy A, B, C csúcsú és a, b, c oldalú háromszöget képez.

Az **1. feladat** kiírása az alábbi.

Adott: u, v, w .

Keresett: $a, b, c; \alpha, \beta, \gamma; t, d; \psi, \varphi, \varphi_x, \varphi_y$.

Az 1. feladat megoldása

Az 1. ábra alapján *Pitagorász* tételével:

$$\underline{\underline{a = \sqrt{v^2 + w^2}}}, \quad \underline{\underline{b = \sqrt{u^2 + w^2}}}, \quad \underline{\underline{c = \sqrt{u^2 + v^2}}}, \quad \boxed{0 < (u, v, w) < \infty}. \quad (1)$$

Most koszinusztétellel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}; \quad (2)$$

majd (1) és (2) - vel:

$$\cos \alpha = \frac{u^2 + w^2 + u^2 + v^2 - v^2 - w^2}{2 \cdot \sqrt{u^2 + w^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{2 \cdot u^2}{2 \cdot \sqrt{u^2 + w^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + w^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{u}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{w}{u}\right)^2}} \rightarrow \underline{\underline{\alpha = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{w}{u}\right)^2}} \right]}}. \quad (3/1)$$

Hasonlóan:

$$\underline{\underline{\beta = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{w}{v}\right)^2}} \right]}}}, \quad (3/2)$$

$$\underline{\underline{\gamma = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{w}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{v}{w}\right)^2}} \right]}}}. \quad (3/3)$$

Az 1. ábra jobb alsó mellékábrája szerint:

$$\cos \psi = \frac{t}{u} = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \rightarrow t = \frac{u \cdot v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{u^2 \cdot v} + \frac{v^2}{u^2 \cdot v^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{1}{u^2}}} \rightarrow \underline{\underline{t = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}}}}}. \quad (4)$$

Majd (4) - gyel:

$$\cos \psi = \frac{t}{u} = \frac{1}{u} \cdot t = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}}} \rightarrow \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2}} \rightarrow$$

$$\underline{\underline{\psi = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2}} \right]}}. \quad (5)$$

Ezután az 1. ábra jobb felső mellékábrája szerint, (4) - gyel is:

$$\sin \varphi = \frac{d}{t} = \frac{w}{\sqrt{w^2 + t^2}} \rightarrow d = \frac{w \cdot t}{\sqrt{w^2 + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{w}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{w}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{w}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{w^2}}},$$

$$\underline{\underline{d = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}}}}. \quad (6)$$

Továbbá (4) és (6) - tal is:

$$\sin \varphi = \frac{d}{t} = \frac{1}{t} \cdot d = \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}}{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}}, \text{ innen:}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}}{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}} \rightarrow \underline{\underline{\varphi = \arcsin \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}}{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}} \right)}}}. \quad (7)$$

Most az 1. ábra alapján:

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{w}{u} \rightarrow \underline{\underline{\varphi_x = \operatorname{arctg} \left(\frac{w}{u} \right)}}, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_y = \frac{w}{v} \rightarrow \underline{\underline{\varphi_y = \operatorname{arctg} \left(\frac{w}{v} \right)}}, \quad (9)$$

A trigonometrikus kifejezéseknek több, egymással egyenértékű alakja is lehetséges.
Ezzel az 1. feladatot megoldottuk.

.....

A **2. feladat** kiírása az alábbi – v. ö.: [1]!

Igazoljuk, hogy a derékszögletű tetraéderre is fennáll Pitagorász tétele, miszerint: a derékszögletű tetraéder *átfogólapja* területének négyzete egyenlő a *befogólapok* területének négyzetösszegével; képlettel:

$$T_n^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2. \quad (T1)$$

A 2. feladat megoldása

Az átfogólap területe az 1. ábra jelöléseivel:

$$T_n = \frac{T_z}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \cdot u \cdot v \cdot \frac{1}{\cos \varphi}; \quad (10)$$

ámde az 1. ábra szerint:

$$\cos \varphi = \frac{d}{w} , \quad (11)$$

így (10) és (11) szerint:

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot u \cdot v \cdot \frac{w}{d} . \quad (12)$$

Most (6) és (12) - vel:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \cdot u \cdot v \cdot w \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{2} \cdot u \cdot v \cdot w \cdot \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot u \cdot v \cdot w \cdot \sqrt{\frac{v^2 \cdot w^2 + u^2 \cdot w^2 + u^2 \cdot v^2}{u^2 \cdot v^2 \cdot w^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u \cdot v \cdot w}{u \cdot v \cdot w} \cdot \sqrt{v^2 \cdot w^2 + u^2 \cdot w^2 + u^2 \cdot v^2} = \\ &= \sqrt{\frac{v^2 \cdot w^2}{4} + \frac{u^2 \cdot w^2}{4} + \frac{u^2 \cdot v^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{u \cdot v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u \cdot w}{2}\right)^2 + \left(\frac{v \cdot w}{2}\right)^2} , \text{ tehát:} \\ T_n &= \sqrt{\left(\frac{u \cdot v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u \cdot w}{2}\right)^2 + \left(\frac{v \cdot w}{2}\right)^2} . \end{aligned} \quad (13)$$

Azonban:

$$\frac{u \cdot v}{2} = T_z , \quad \frac{u \cdot w}{2} = T_y , \quad \frac{v \cdot w}{2} = T_x , \quad (14)$$

így (13) és (14) - gyel:

$$\underline{\underline{T_n^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}} , \quad (15)$$

vagyis a (T1) tétel állítása adódik.

Ezzel a 2. feladatot megoldottuk.

.....

A **3. feladat** kiírása az alábbi.

Igazoljuk, hogy az 1. ábrán jelölt megfelelő szögek közt fennáll, hogy:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_y}{\operatorname{tg} \varphi_x} , \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi_x + \operatorname{tg}^2 \varphi_y} ! \quad (T2)$$

A 3. feladat megoldása

Az első állításhoz az 1. ábra szerint:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{u}{v} , \quad \operatorname{tg} \varphi_x = \frac{w}{u} , \quad \operatorname{tg} \varphi_y = \frac{w}{v} ; \quad (16)$$

most (T2 / 1) szerint:

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_y}{\operatorname{tg} \varphi_x} = \frac{\frac{w}{v}}{\frac{u}{v}} = \frac{w}{u} = \operatorname{tg} \psi \rightarrow \underline{\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_y}{\operatorname{tg} \varphi_x}},$$

vagyis (T2 / 1) - t beláttuk.

A második állításhoz az 1. ábra szerint, (4) és (16) - tal is:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{w}{t} = \frac{w}{\frac{u \cdot v}{\sqrt{u^2 + v^2}}} = \frac{w}{u} \cdot \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{v} = \frac{w}{u} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} = \operatorname{tg} \varphi_x \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_y}{\operatorname{tg} \varphi_x}\right)^2} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi_x + \operatorname{tg}^2 \varphi_y},$$

tehát:

$$\underline{\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi_x + \operatorname{tg}^2 \varphi_y}},$$

amivel (T2 / 2) - t is beláttuk.

Ezzel a 3. feladatot megoldottuk.

.....

Megjegyzések:

M1. A 2. feladatban alkalmazott befogólapok és átfogólap szóhasználatát követtük az [1] és [2] forrásokat. A levezetéssel már nem.

M2. A 2. feladatban felhasználtuk azt a tételt, miszerint:

$$T_{vet} = T \cdot \cos \varphi \rightarrow T = \frac{T_{vet}}{\cos \varphi}. \quad (M1)$$

Ez esetünkben, az 1. ábra jelöléseivel, így jön ki, $m_c \equiv \overline{CT}$ - vel:

$$T_{vet} \equiv T_z = \frac{1}{2} \cdot c \cdot t = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (m_c \cdot \cos \varphi) = \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot m_c\right) \cdot \cos \varphi = T_n \cdot \cos \varphi \equiv T \cdot \cos \varphi,$$

tehát:

$$\underline{T_{vet} = T \cdot \cos \varphi}.$$

M3. A 3. feladatban szereplő (T2 / 2) összefüggés is Pitagorász tételéhez hasonló alakú, a szögek tangenseire. Hasonló alakú képlettel találkoztunk már tetővel kapcsolatos számítások során is.

M4. Egyes képleteknek lehet egyszerűbb alakja is, de esztétikai okok miatt választottuk azokat, amiket itt eredményként jelöltünk meg.

M5. Némelyik képletnek itt más, a korábbiaktól*) (esetleg) eltérő levezetését mutattuk meg. Ilyen pl. a (6) képlet is.

M6. Az 1. ábrán feltüntetett **Oxyz** térbeli derékszögű koordináta - rendszerben az **ABC** háromszög síkjának egyenlete:

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1, \quad (M2)$$

ahol **(u , v , w)** a tengelymetszetek – [3].

M7. Az itteni „tananyag” középiskolai, esetleg szakköri szintű. Erre utal [1] alcíme is.

M8. Van valami érdekes „ritmusa” az alábbi képleteknek:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2}}}, \\ t &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}}} = u \cdot \cos \psi, \\ d &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}} = t \cdot \sin \varphi = u \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (M3)$$

Lehet ennek a sornak folytatása?

M9. Az itteni **ABC** háromszöget a merőleges axonometriában *nyomháromszög*nek neveztük. Az jutott eszünkbe, hogy levezethetnénk az ennek területét megadó *Héron* - képletet, illetve egy azzal egyenértékű képletet az **u , v , w** segédmenyiségek alkalmazásával is. Ezt meg is tettük, az eredmény egyenértékű a Héron szerintivel; de csak addig, amíg az (1) - beli bekeretezett korlátozás határait túl nem lépjük. Eszerint itt a nyomháromszög hegyesszögű, elfajuló – pl.: **w = 0** – esetben legfeljebb derékszögű háromszög lehet, tompaszögű már nem. Ennek érdemes lehet utánagondolni. Vagyis a mondott számítással igazából nem jutottunk előrébb, így azt nem is mutatjuk be. Az ötlet, miszerint síkgeometriai problémát térgeometriai úton oldjunk meg, máskor még akár jól is jöhet. Itt is működött, mert arra voltunk kíváncsiak, hogy tudnánk - e az eredeti Héron - képlettel egyenértékű, de annál kevésbé „sablonos” képletet találni. Attól tartunk, hogy az eredeti területképlet már csak az alakjával is elriasztja a kezdőt. Az említett „sablonosság” szerintünk abból fakad, hogy a matematikusok mindig valami végső, letisztult, ezáltal számukra (!) „szép” képletek előállítására törekednek. Ezzel a ténnyel már számos esetben szembesültünk. Ez van.

M10. A (T1) tételhez javasoljuk a [2] mű tanulmányozását is.

M11. Jelen írásunk némiképp ismétlő, összefoglaló jellegű. Nem baj, kell az ilyen is.

Ajánlott olvasmány:

*)
<https://galgoczi.net/anyagok/Az%20orthogonalis%20axonometria%20alaposszefuggeseiro1.pdf>

Források:

- [1] – ***Fitos László***: Analóg tételek és feladatok a sík - és térgeometriában
 Középiskolai szakköri füzetek
 Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.
- [2] – ***Hajós György***: Bevezetés a geometriába
 6. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [3] – ***I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev***: Matematikai zsebkönyv
 2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
 ny. mérnöktanár

Sződliget, 2022. 04. 29.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>